• ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ n-τάξης

$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\cdot y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$ (E)

όπου $a_i, b : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $a_n(x) \neq 0$, $x \in I$

Επίσης, αν $b(x) \neq 0$ μη ομογενής

, αν $b(x) = 0$ ομογενής (E_0)

y: λύση της (E) στο I, με $y \in C^n(I)$ και ικανοποιεί την (E).

Επίσης, $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Μιλάμε για πρόβλημα αρχικών τιμών εάν

$y(x_0) = c_0$, $y'(x_0) = c_1$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$ (C).

(Π.Α.Τ. $(E)-(C)$)

Αλγεβρα γραμμικών συστημάτων

~ $n \times n$, ομογενές: Έχει μη μηδενική λύση $\Leftrightarrow D = 0$

~ $m \times n$ για $m < n$: Έχει άπειρες λύσεις

Παραγώγιση ορίζουσών:

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}' =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}'(x) & \dots & a_{1n}'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}'(x) & \dots & a_{nn}'(x) \end{vmatrix}.$$

ΟΡΙΣΜ) Ας είναι $f_1, \dots, f_k : I \to \mathbb{R}$
Θα λέμε ότι οι $f_1, \dots, f_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένες αν υπάρχουν $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ με $|c_1| + \dots + |c_k| \neq 0$
και $c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x) = 0 \ , \ x \in I$

Παράδειγμα 2 σελ. 78
i) Έστω οι συναρτήσεις
$f_1(x) = \sin x \ , \ f_2(x) = 3 \cdot \sin x$ και $f_3(x) = -\sin x$
Να αποδείξετε ότι οι f_1, f_2, f_3 γραμμ. εξαρτημένες

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:
$3 \cdot \sin x - 2 \sin x - \sin x = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$
δηλ. $1 \cdot f_2(x) + (-2) f_1(x) + 1 \cdot f_3(x) = 0$
Επί $|c_1| + |c_2| + |c_3| = 1 + 2 + 1 = 4$

ii) Ομοίως να αποδείξετε ότι είναι γραμμ. ανεξάρτητες οι συναρτήσεις:
$g_1(x) = 1 \ , \ g_2(x) = \cos x \ , \ g_3(x) = \cos 2x$

ΛΥΣΗ

Ας είναι $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ με
$c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + c_3 g_3(x) = 0$
Αρκεί νδο $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$x = 0 \ , \ c_1 + c_2 + c_3 = 0$
$x = \frac{\pi}{6} \ , \ c_1 + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot c_3 = 0$
$x = \frac{\pi}{2} \ , \ c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3(-1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 + \frac{1}{2} c_3 = 0 \\ c_1 - c_3 = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$

$\mathcal{L} : C^n(I) \to C(I)$

$\mathcal{L}(f)(x) = a_n(x) \cdot f^n(x) + \ldots + a_1(x) \cdot f'(x) + a_0(x) \cdot f(x) \in C(I)$

και αρκεί να λύσουμε το $L(y) = b$ σύστημα.

Ορισμός:

Ας είναι $f_1, \ldots, f_n \in C^{(n-1)}(I)$

Η ορίζουσα $\begin{vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(y_1, \ldots, y_n)(x)$

καλείται ορίζουσα WRONSKI των $y_1, y_2, \ldots, y_k$

πχ

$$W(x^2, e^{3x})(x) = \begin{vmatrix} x^2 & e^{3x} \\ 2x & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3 \cdot x^2 e^{3x} - 2x \cdot e^{3x}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν y_1, y_2 λύσεις της (E_0) στο I και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση:

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $x \in I$

είναι λύση της (E_0)

Απόδειξη

Η y_1 λύση της (E_0) : $\mathcal{L}(y_1) = 0$ (1)

Η y_2 λύση της (E_0) : $\mathcal{L}(y_2) = 0$ (2)

Αλλά, $L(y) = L(c_1 y_1 + c_2 y_2) \underset{\text{τελεστής}}{\overset{\text{γραμμικός}}{=}}$

$= a_n (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)} + \ldots + a_0 (c_1 y_1 + c_2 y_2) =$

$= a_n \cdot (c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)}) + \ldots + a_0 (c_1 y_1 + c_2 y_2) =$

$= c_1 (a_n y_1^{(n)} + \ldots + a_0 y_1) + c_2 \cdot (a_1 y_1^{(n)} + \ldots + a_0 y_2) =$

$\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \rightsquigarrow y$ λύση της (E)

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Ας είναι $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της (E_0), $x_0 \in I$
οι $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες $\Leftrightarrow \begin{cases} W(y_1, \dots y_n)(x) \neq 0 \\ \forall x \in I \end{cases}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: Ας είναι $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της (E_0), $x_0 \in I$
(Τύπος Liouville) τότε

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds}$$

πχ

(1) Εστω $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = e^x - 1$, $x > 0$
Είναι λύσεις γραμμικούς ομογένους εξίσωσης;

ή

(2) Εστω $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = e^x - 1$, $x > -1$
Είναι λύσεις γραμμικής ομογένους εξίσωσης;

Απ:

(2) $\to$ Το $x = 0$, $W(y_1, \dots, y_n) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$
αλλά η WRONSKI δεν μηδενίζεται πουθενά
άρα δεν είναι λύσεις γραμμικής ομογένους
εξίσωσης

(1) $\to$ Η WRONSKI <u>ΔΕΝ</u> μηδενίζεται στο $(0, +\infty)$
Άρα, πιθανόν και να έχει λύση. (Ανοιχτό πρόβλημα)